



Gabriel Popa
Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Dorel Luchian

**Evaluarea
Națională
,
2027**

Matematică

Editura Paralela 45

Cuprins

Cuvânt-înainte / 5

MEMORATOR DE MATEMATICĂ / 7

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi / 20

TEMA 2. Numere raționale / 21

TEMA 3. Rapoarte. Proportii. Procente / 23

TEMA 4. Numere reale / 24

TEMA 5. Calcul algebric / 27

TEMA 6. Funcții / 29

TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații / 33

TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere / 35

TEMA 9. Asemănare. Relații metrice / 38

TEMA 10. Arii / 41

TEMA 11. Cercul / 44

TEMA 12. Elemente ale geometriei în spațiu / 47

TEMA 13. Poliedre / 51

TEMA 14. Corpuri rotunde / 54

TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

10 TESTE PENTRU LUNA DECEMBRIE / 57

10 TESTE PENTRU LUNA MARTIE / 80

80 DE TESTE FINALE / 103

SOLUȚII ȘI INDICAȚII DE REZOLVARE

TEME RECAPITULATIVE / 266

TESTE / 280

CUVÂNT-ÎNAINTE

Lucrarea *Matematică. Evaluarea Națională 2027* vine în întâmpinarea așteptărilor elevilor și profesorilor care se află pe traseul pregătirii Evaluării Naționale 2027.

Având în vedere competențele vizate prin programa de examen, precum și exigențele firești ale studiului matematicii, am gândit o structură complexă și eficientă a cărții, care implică un memorator, 14 teme/lecții recapitulative din materia pentru examen a claselor V-VIII și **100 de teste pregătitoare**:

- **10 teste pentru luna decembrie**, care evaluează materia parcursă până în acel moment;
- **10 teste pentru luna martie**, dedicate verificării progresului și identificării conținuturilor ce necesită consolidare;
- **80 de teste finale**, pentru antrenamentul complet dinaintea Evaluării Naționale.

Testele sunt elaborate în conformitate cu programa școlară, cu modelul de structură de subiect și cu baremul de evaluare și notare în vigoare, luând în considerare schimbările de nuanță observate în testele de antrenament și în subiectele de examen din fiecare an de examinare.

Toate testele respectă **programa școlară și structura modelului de subiect în vigoare. Acestea sunt ordonate gradual ca dificultate – de la nivel accesibil la nivel mediu și apoi la un grad mai ridicat de complexitate** –, astfel încât fiecare elev să poată progresa în ritmul propriu, în cadrul strategiei didactice a profesorului, și să atingă treptat nivelul de pregătire necesar examenului.

Soluțiile și indicațiile de rezolvare, aflate la finalul culegerii, îi ajută pe elevi să își verifice răspunsurile, să înțeleagă metodele de rezolvare și să își perfecționeze strategiile de lucru.

Concepută pe baza experienței autorilor în pregătirea elevilor pentru Evaluarea Națională, această culegere oferă un parcurs coerent și echilibrat, adaptat nivelurilor diferite de pregătire și orientat către obținerea unor rezultate cât mai bune la examen.

Să fie un exercițiu cu sens, aducător de succes!

Autorii

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

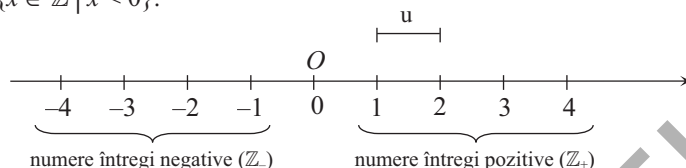
ALGEBRĂ

MULȚIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale; $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

OPERAȚII CU MULȚIMI

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

OPERAȚII CU NUMERE

Factor comun: $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$, $\forall a, b, f \in \mathbb{R}$.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (citim: „n factorial”); } 0! = 1.$$

Opusul numărului real r este numărul real $-r$.

Inversul numărului real nenul r este numărul real $r^{-1} = \frac{1}{r}$.

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

În $\mathbb{N}$: $\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, \exists! c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r, 0 \leq r < b$.

În $\mathbb{Z}$: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \exists! c \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r, 0 \leq r < |b|$.

DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$

Pentru $d, m \in \mathbb{N}$ spunem că $d \mid m$ dacă există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = d \cdot x$.

Proprietăți:

$$P_1: 1 \mid n; n \mid 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P_2: \text{Dacă } a, d \in \mathbb{N} \text{ și } d \mid a, \text{ atunci } d \mid a \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P_3: \text{Dacă } a, b, d \in \mathbb{N}, d \mid a \text{ și } d \mid b, \text{ atunci } d \mid (a \pm b).$$

Criterii de divizibilitate:

I. Folosind ultima cifră a numărului: $2 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $5 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}$; $10 \mid n \Leftrightarrow u(n) = 0$.

II. Folosind suma cifrelor numărului: $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid S(n)$; $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid S(n)$.

III. Folosind ultimele două cifre ale numărului: $4 \mid \overline{a \dots xy} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{xy}$; $25 \mid \overline{a \dots xy} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{xy}$.

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

- Calculați:
a) $60 - 40 : 4$; b) $25 - 20 : (13 - 8)$; c) $142 : (1 + 2 \cdot 35)$; d) $12 + 60 : [14 - 2 \cdot (3 + 2)]$.
- Aflați numărul natural de două cifre care adunat cu suma cifrelor sale dă 54.
- Suma a două numere naturale este 11. Care este valoarea minimă și valoarea maximă a produsului lor?
- Determinați toate numerele naturale n , știind că n împărțit la 12 dă câtul 5 și restul un pătrat perfect.
- Determinați toate numerele naturale care, împărțite la un număr de două cifre, dau câtul 10 și restul 97.
- Aflați numerele naturale a și b , știind că suma lor este egală cu 19, iar a împărțit la b dă câtul și restul 3.
- Suma a trei numere naturale este 502. Aflați cele trei numere, știind că al doilea este triplul primului și că, împărțind pe al treilea la al doilea, obținem câtul 7 și restul 2.
- Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $b = a + 2c$ și $\overline{abc}$ împărțit la 112 dă câtul a și restul 59.
- Calculați:
a) $2^3 + 3^2 - 4^0$; b) $0^7 + 3^{10} : 3^8 - 9$;
c) $(2^5)^{12} : 2^{56} - 3^{20} : 3^{18}$; d) $25^7 : 5^{14} + 3^{90} : 27^{29}$;
e) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^5)^{10} : 2^{75}$; f) $(2^3 \cdot 3^4)^{12} : (2^{35} \cdot 3^{45})$;
g) $(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}) : 2^{10}$; h) $2^5 - 3 \cdot [3 \cdot 7 - 2 \cdot (6^2 - 2^3) : 4] + 1^{123}$.
- Fie numerele naturale $a = 2^{29} + 2^{40} : 2^{11}$ și $b = 12^{20} : 2^{40}$.
a) Arătați că $a = 2^{30}$. b) Comparați numerele a și b .
- a) Arătați că numărul natural $a = 5 \cdot 3^{42} + 9^{20} - 10 \cdot 3^{40}$ este pătrat perfect.
b) Demonstrați că numărul natural $b = 3^{42} + 2^{43}$ nu este pătrat perfect.
- Fie numărul natural $a = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} + 3^{11}$.
a) Arătați că a este număr par. b) Arătați că numărul a este divizibil cu 10.
- Demonstrați că numărul natural $a = 2^{n+3} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 2^n - 3 \cdot 14^n$ se divide cu 12, pentru orice număr natural n .
- Demonstrați că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul natural $\overline{abcd}$ se divide cu 7.
- Determinați toate numerele prime p, q, r , știind că $p + 4q + 54r = 392$.
- a) Descompuneți în factori primi fiecare dintre numerele: 56, 72, 144 și 2700.
b) Câți divizori naturali are numărul 48?
- Determinați toate valorile posibile ale numărului natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $n = \overline{7x}$ și $2 \mid n$; b) $n = \overline{6xy}$, $2 \mid n$ și $9 \mid n$;
c) $n = \overline{x5y}$, $4 \mid n$ și $3 \mid n$; d) $n = \overline{1xy}$, $5 \mid n$ și suma cifrelor lui n este 8.
- Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun pentru următoarele numere:
a) 48, 60; b) 12, 15, 18.
- Elevii unei clase au cumpărat 168 de mere, 96 de portocale și 72 de banane. Ei vor să facă pachete cu fructe pentru a le oferi unui cămin de bătrâni. Toate pachetele trebuie să fie la fel și să conțină și mere și portocale și banane. Care este cel mai mare număr de pachete pe care pot să le facă elevii?
- La o florărie, vânzătoarea observă că, dacă grupează toate florile câte 18 și toate florile câte 24, rămân de fiecare dată câte trei flori. Aflați câte flori sunt în florărie, știind că numărul lor este cuprins între 450 și 570.
- La o sedință de pregătire, antrenorul împarte sportivii în grupe numeric egale (cu cel puțin 2 sportivi) pentru diverse exerciții. Dacă face grupele de câte 6 sportivi, rămân 3 sportivi în afară, dacă face grupele de câte 4, rămâne unul în afară, iar dacă face grupele de câte 9, atunci 6 dintre sportivi nu sunt folosiți. Aflați câți sportivi are antrenorul, știind că numărul lor este mai mic decât 50. Cum ar trebui să facă grupele antrenorul, pentru ca să nu rămână sportivi pe dinafară și numărul grupelor să fie cât mai mare?
- Sanda a cumpărat CD-uri în valoare de 486 de lei. Unele CD-uri au costat 54 de lei, iar celelalte au costat 90 de lei. Aflați câte CD-uri a cumpărat Sanda.
- a) Ordonați crescător numerele întregi: 1, -3, 0, -2, -7, 9, 4.
b) Ordonați descrescător numerele întregi: -4, 1, 3, -2, 7, -1, -5.

80 de
teste
FINALE

45

EDITURA PĂRINTELEA

◆ TESTUL 21 ◆

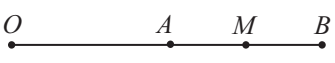
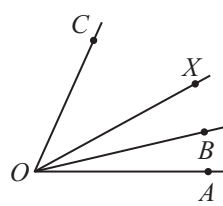
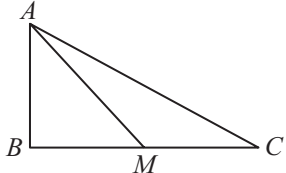
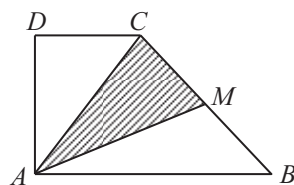
SUBIECTUL I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

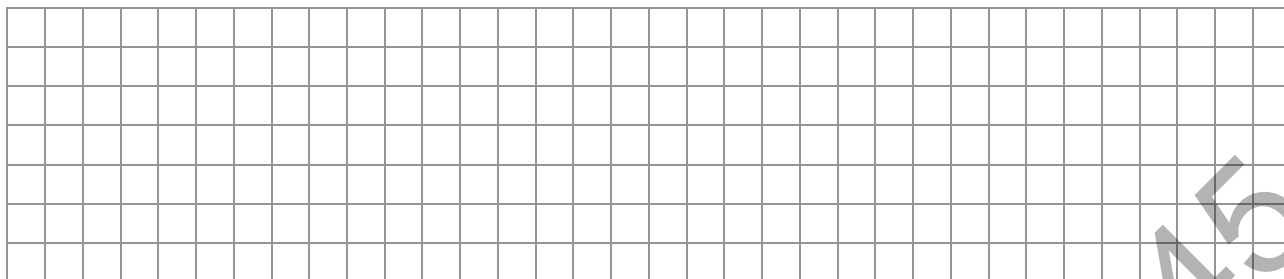
- (5p) 1. Suma numerelor prime din șirul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 este egală cu:
 a) 10; b) 17; c) 45; d) 55.
- (5p) 2. Dacă $\frac{5}{2x-1} = \frac{3}{111}$, atunci numărul real x este egal cu:
 a) 93; b) 100; c) 278; d) 301.
- (5p) 3. Produsul dintre cel mai mic element negativ și cel mai mare element negativ ale mulțimii $A = \{-6, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4\}$ este egal cu:
 a) 12; b) 0; c) -12; d) -24.
- (5p) 4. Scrierea fracției zecimale 0,1(6) sub formă de fracție ordinară este:
 a) $\frac{16}{99}$; b) $\frac{16}{90}$; c) $\frac{8}{5}$; d) $\frac{1}{6}$.
- (5p) 5. Patru elevi, Andrei, Bianca, Codrin și Daniela, au efectuat calculul $(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2$ și au obținut rezultatele înregistrate în tabelul alăturat. Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:
 a) Andrei; b) Bianca; c) Codrin; d) Daniela.
- | Andrei | Bianca | Codrin | Daniela |
|--------|--------|--------|-------------|
| 4 | 10 | 14 | $8\sqrt{3}$ |
- (5p) 6. Un biciclist s-a deplasat cu viteza de 15 km/h pe o distanță de 45 km, iar un pieton s-a deplasat cu viteza de 4 km/h pe o distanță de 10 km. Enunțul: „Pietonul a avut timpul de deplasare mai mare decât biciclistul.” este:
 a) adevărat; b) fals.

SUBIECTUL al II-lea. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

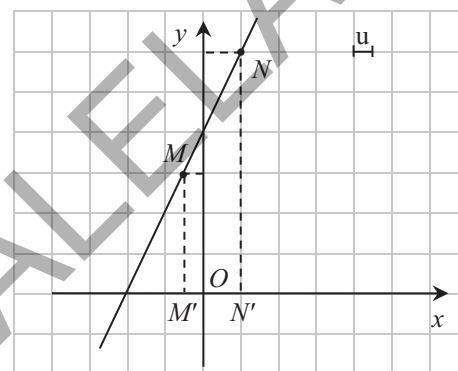
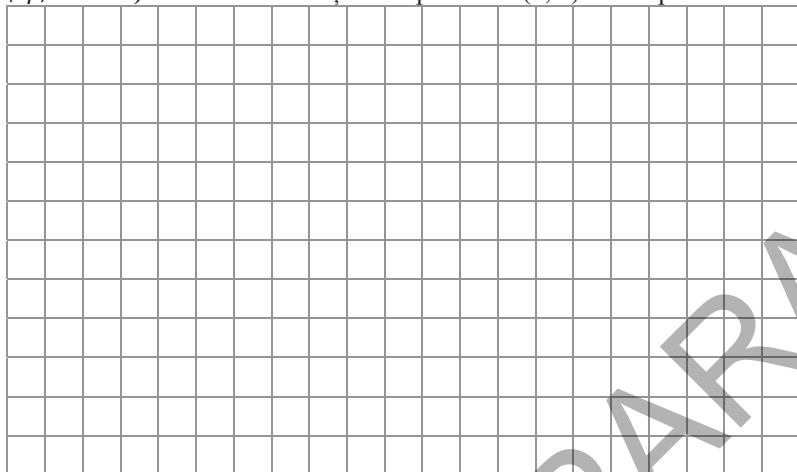
- (5p) 1. În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare O, A, B . Se știe că $OA = 7$ cm, $OB = 13$ cm și că punctul M este mijlocul segmentului AB . Lungimea segmentului OM este egală cu:
 a) 3 cm; b) 7 cm;
 c) 10 cm; d) 13 cm.
- 
- (5p) 2. În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente AOB și BOC , cu $\angle AOB = 10^\circ$ și $\angle BOC = 64^\circ$. Dacă semidreapta OX este bisectoarea unghiului AOC , atunci măsura unghiului BOX este egală cu:
 a) 10° ; b) 20° ;
 c) 27° ; d) 37° .
- 
- (5p) 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 6$ cm și ipotenuza $AC = 10$ cm. Lungimea medianei AM este egală cu:
 a) $2\sqrt{5}$ cm; b) 6 cm;
 c) $2\sqrt{13}$ cm; d) 8 cm.
- 
- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu bazele AB și CD , în care măsura unghiului BAD este egală cu 90° , $AD = 4$ cm și $AB = 7$ cm. Dacă punctul M este mijlocul laturii BC , atunci aria triunghiului AMC este egală cu:
 a) 6 cm^2 ; b) 7 cm^2 ;
 c) 14 cm^2 ; d) 28 cm^2 .
- 

(3p) b) Arată că numărul $n = E(\sqrt{2}) + E(2 + \sqrt{2})$ este natural.

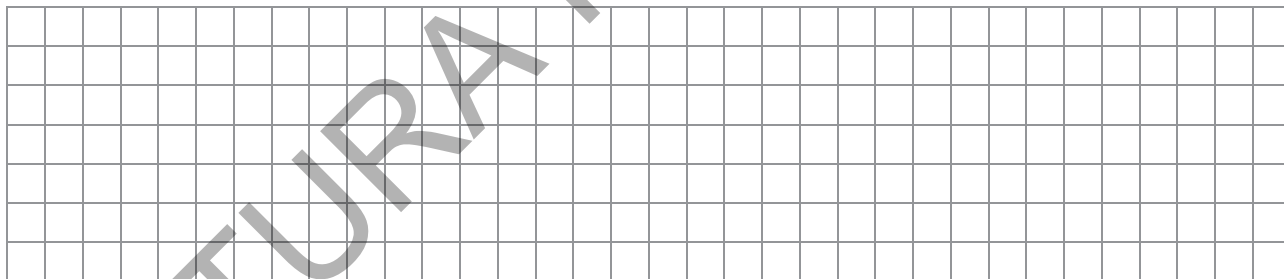


3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 8$ și sistemul de axe ortogonale xOy .

(2p) a) Determină distanța de la punctul $O(0, 0)$ la dreapta care este reprezentarea grafică a funcției f .

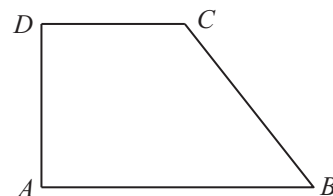
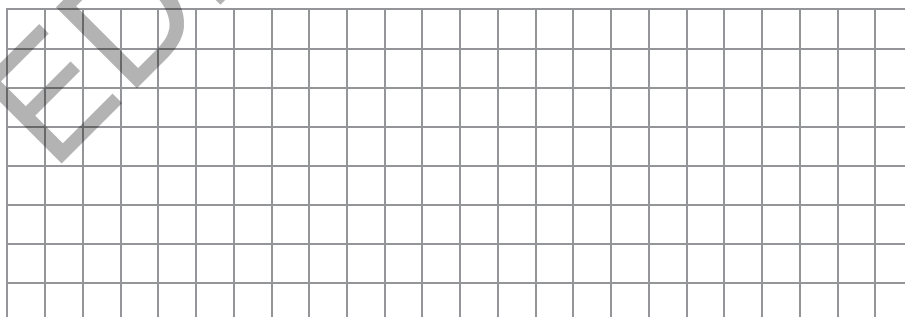


(3p) b) Dacă punctele $M(-1, m)$ și $N(n, 12)$ aparțin reprezentării grafice a funcției f , iar punctele M' , respectiv N' sunt proiecțiile lor pe axa Ox , calculează aria patrulaterului $MM'N'N$.

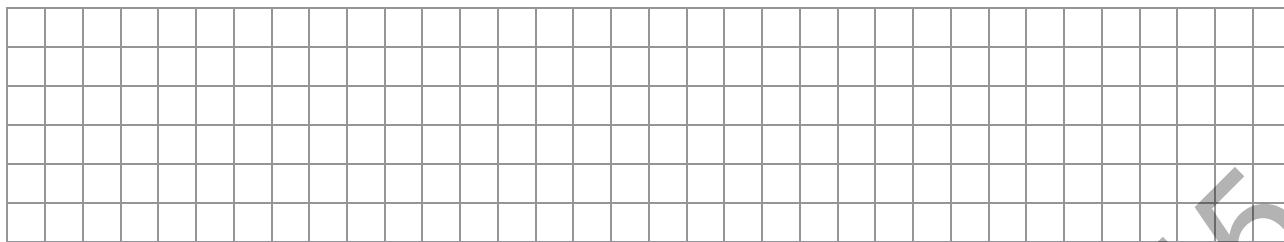


4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu baza mare $AB = 6$ cm, baza mică $CD = 4$ cm, $\angle A = 90^\circ$ și $\angle B = 60^\circ$.

(2p) a) Calculează aria trapezului $ABCD$.

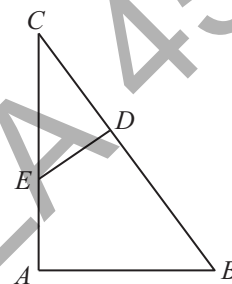
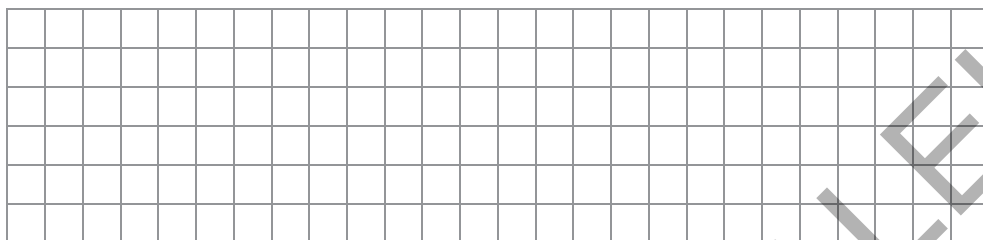


(3p) b) Determină măsura unghiului BDC .



5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Punctele D și E sunt situate pe laturile BC , respectiv AC , astfel încât $CD = 4$ cm și $CE = 5$ cm.

(2p) a) Calculează lungimea ipotenuzei BC .

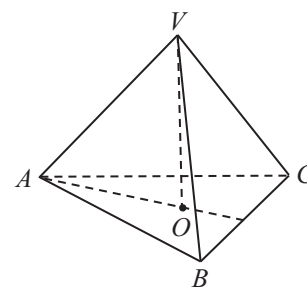
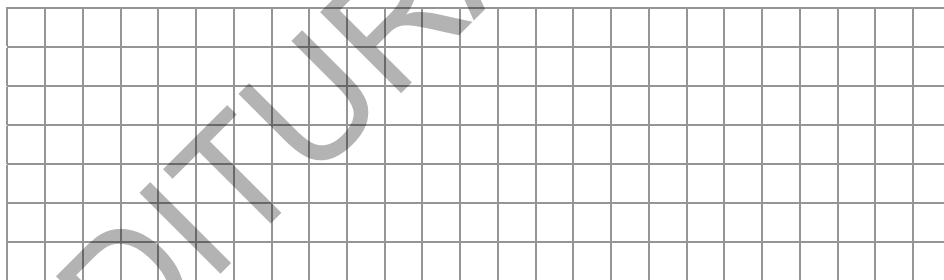


(3p) b) Arată că dreapta BE este mediatoarea segmentului AD .

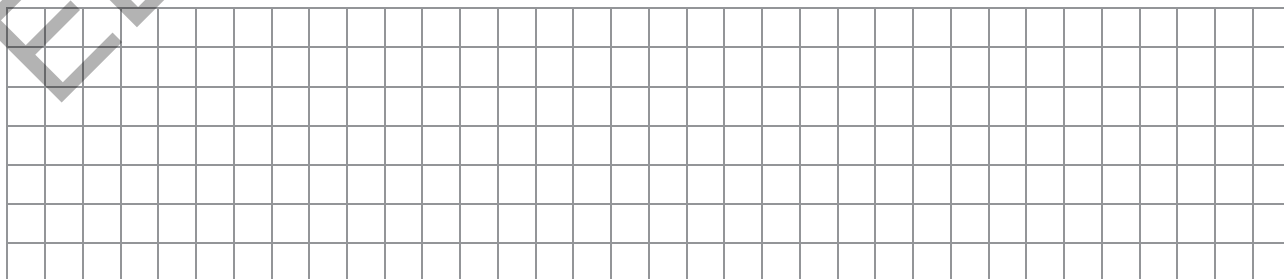


6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 2$ cm.

(2p) a) Calculează aria laterală a piramidei $VABC$.



(3p) b) Determină măsura unghiului format de planele (ABC) și (VBC) .



◆ TESTUL 64 ◆

SUBIECTUL I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

(5p) 1. Opusul numărului $a = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(-\frac{1}{24}\right)$ este egal cu:

- a) -10 ; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{6}$; d) 2.

(5p) 2. La un concurs s-au acordat mai multe diplome conform tabelului următor:

Diploma	Premiul I	Premiul al II-lea	Premiul al III-lea	Mențiune
Număr elevi	3	6	9	18

Dacă numărul premiilor reprezintă $p\%$ din numărul total de diplome acordate, atunci p este egal cu:

- a) 30; b) 40; c) 50; d) 60.

(5p) 3. Roma Antică a fost un oraș-stat a cărui istorie începe în anul 753 î.H. și se sfârșește în anul 476 d.H. Existența Romei Antice s-a întins pe o perioadă de:

- a) 277 de ani; b) 476 de ani; c) 753 de ani; d) 1229 de ani.

(5p) 4. Scrierea numărului 144 ca produs de puteri de numere prime distincte este:

- a) $2^4 \cdot 9$; b) $9 \cdot 16$;
c) $2^4 \cdot 3^3$; d) $2^4 \cdot 3^2$.

Ana	$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$	$y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$	$x - y$
Maria	$x = 3\sqrt{2}$	$y = -\sqrt{18}$	$x + y$
Ioana	$x = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{8}}$	$y = \sqrt{2}$	$x \cdot y$
Sabina	$x = 2\sqrt{6}$	$y = 5\sqrt{3}$	$x : y$

(5p) 5. Patru eleve, Ana, Maria, Ioana și Sabina, au primit ca temă să efectueze operațiile indicate în tabelul alăturat. Dacă operațiile s-au efectuat corect, atunci elevele care au obținut ca rezultat un număr rațional sunt:

- a) Maria și Ioana; b) Ana și Ioana;
c) Maria și Sabina; d) Ana și Sabina.

(5p) 6. Iustina și Elena merg la același bazin de înot. Iustina poate înota 10 lungimi de bazin în 25 de minute, iar Elena poate înota 12 lungimi de bazin în 32 de minute. Afirmatia: „Elena înoată mai repede decât Iustina.” este:

- a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

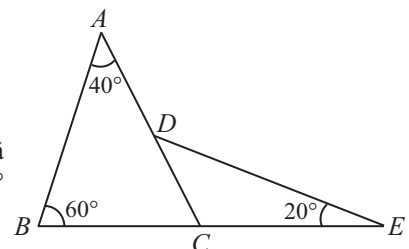
(5p) 1. În figura alăturată, punctul A este simetricul punctului N față de punctul M , iar punctul B este simetricul punctului A față de punctul N . Valoarea raportului $\frac{MN}{AB}$ este egală cu:

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$;
c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{2}{3}$.



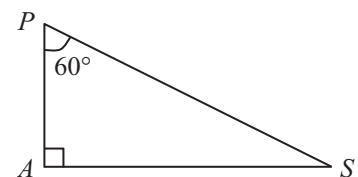
(5p) 2. În figura alăturată, punctul D se află pe latura AC , iar punctul E se află pe prelungirea laturii BC a triunghiului ABC . Dacă $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ și $\angle E = 20^\circ$, atunci măsura unghiului CDE este egală cu:

- a) 40° ; b) 50° ;
c) 60° ; d) 70° .

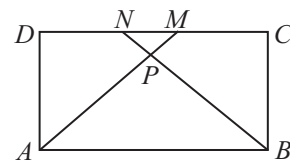


(5p) 3. O pisică P sare de pe un zid $PA = 1$ m pentru a prinde un șoarece S pe care îl vede sub un unghi de 60° (vezi figura alăturată). Distanța AS de la șoarece la zid este egală cu:

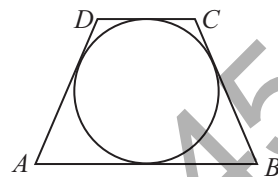
- a) 1 m; b) $\sqrt{3}$ m;
c) 2 m; d) $2\sqrt{3}$ m.



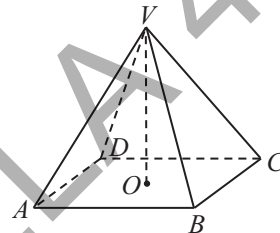
- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 8$ cm și $AD = 6$ cm. Bisectoarele AM și BN ale unghiurilor DAB , respectiv ABC se intersectează în punctul P ($M, N \in DC$). Aria patrulaterului $BCMP$ este egală cu:
- a) 17 cm^2 ; b) 15 cm^2 ;
c) 11 cm^2 ; d) 14 cm^2 .



- (5p) 5. În figura alăturată, laturile trapezului isoscel $ABCD$ cu bazele $AB = 12$ cm și $CD = 4$ cm sunt tangente unui cerc. Perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu:
- a) 16 cm; b) 24 cm;
c) 32 cm; d) 48 cm.



- (5p) 6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V , înălțimea $VO = 12$ cm și latura bazei $AB = 10$ cm. Aria totală a piramidei $VABCD$ este egală cu:
- a) 240 cm^2 ; b) 260 cm^2 ;
c) 360 cm^2 ; d) 400 cm^2 .



SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete.

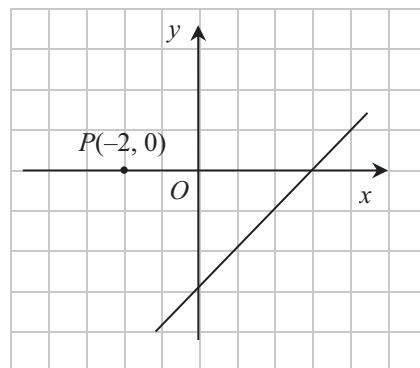
(30 de puncte)

1. De pe două loturi, având împreună 206 ha, s-a strâns recolta de cartofi, obținându-se, de pe fiecare lot, câte 19 tone la hectar.
- (2p) a) Află câte tone de cartofi s-au recoltat de pe cele 206 ha.
- (3p) b) Determină câte hectare are fiecare lot, știind că de pe primul s-au obținut cu 608 tone de cartofi mai mult decât de pe al doilea.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - x$, unde

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

- (2p) a) Arată că $E(x) = x^3 - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
- (3p) b) Demonstrează că numărul natural $E(n)$ este divizibil cu 6, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

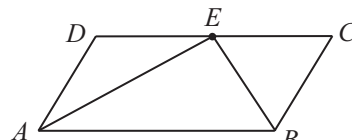


3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3$.

- (2p) a) Calculează $f(\sqrt{7}) \cdot f(\sqrt{8}) \cdot f(\sqrt{9}) \cdot f(\sqrt{10}) \cdot f(\sqrt{11})$.
- (3p) b) Determină distanța de la punctul $P(-2, 0)$ la reprezentarea grafică a funcției f , în sistemul de axe ortogonale xOy .

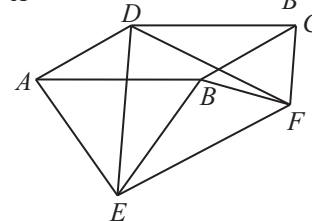
4. În figura alăturată este desenat paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 24$ cm, $BC = 12$ cm și $\angle BAD = 60^\circ$.

- (2p) a) Calculează lungimea diagonalei BD .
- (3p) b) Arată că, dacă E este mijlocul laturii CD , atunci unghiul AEB este drept.



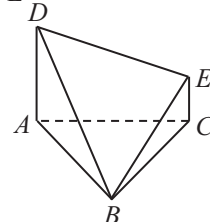
5. În figura alăturată sunt desenate un paralelogram $ABCD$, cu $\angle BAD = 30^\circ$, $AB = 8$ cm și $BC = 4$ cm, și triunghiurile echilaterale ABE și BCF în exteriorul paralelogramului.

- (2p) a) Calculează lungimea segmentului DE .
- (3p) b) Demonstrează că triunghiul DEF este echilateral.



6. În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB = 30$ cm și punctele D și E situate de aceeași parte a planului (ABC) , astfel încât $DA \perp (ABC)$, $EC \perp (ABC)$, $AD = 40$ cm și $CE = 20$ cm.

- (2p) a) Află măsura unghiului format de planele (ABD) și (CBE) .
- (3p) b) Calculează distanța de la punctul D la dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (DBE) .



♦ TESTUL 99 ♦

SUBIECTUL I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

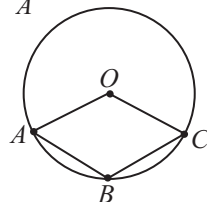
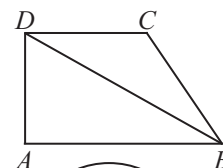
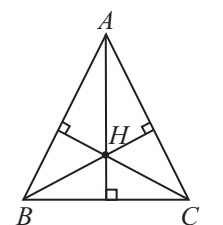
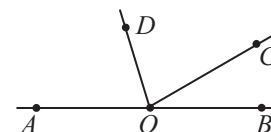
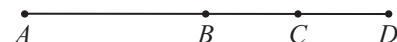
(30 de puncte)

- (5p) 1. Rezultatul calculului $50 - 25 : 5$ este egal cu:
 a) 5; b) 30; c) 20; d) 45.
- (5p) 2. Cel mai mare număr întreg negativ din intervalul $[-2, 7)$ este egal cu:
 a) 7; b) -2; c) -1; d) 0.
- (5p) 3. Șase caiete de același fel costă 36,6 lei. Prețul unui astfel de caiet este egal cu:
 a) 6,1 lei; b) 6,01 lei; c) 6,6 lei; d) 6 lei.
- (5p) 4. Frația supraunitară din mulțimea $\left\{\frac{7}{4}, \frac{4}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right\}$ este:
 a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{4}$; c) $\frac{4}{7}$; d) $\frac{1}{7}$.
- (5p) 5. Patru elevi, Ana, Bogdan, Corina și Dan, au calculat suma numerelor $a = \sqrt{12} + 2\sqrt{27}$ și $b = \sqrt{27} - 2\sqrt{12}$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul alăturat. Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:
 a) Bogdan; b) Ana; c) Dan; d) Corina.
- | Ana | Bogdan | Corina | Dan |
|-------------|--------|-------------|-------------|
| $7\sqrt{3}$ | 3 | $3\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}$ |
- (5p) 6. Adrian afirmă: „Suma tuturor cifrelor care dau restul 2 la împărțirea prin 3 este egală cu 15.”. Afirmatia lui Adrian este:
 a) adevărată; b) falsă.

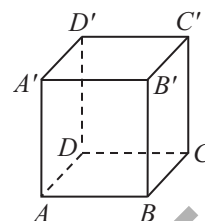
SUBIECTUL al II-lea. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

- (5p) 1. În figura alăturată, punctele A, B, C, D sunt coliniare astfel încât punctul C este mijlocul segmentului BD , $AB = 2BC$ și $AD = 20$ cm. Lungimea segmentului AC este egală cu:
 a) 5 cm; b) 10 cm;
 c) 15 cm; d) 12,5 cm.
- (5p) 2. În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente suplementare AOC și BOC astfel încât $\angle AOC = 5\angle BOC$, iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOC . Măsura unghiului DOC este egală cu:
 a) 60° ; b) 65° ;
 c) 70° ; d) 75° .
- (5p) 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC , iar punctul H este ortocentrul său. Măsura unghiului AHC este egală cu:
 a) 90° ; b) 100° ;
 c) 120° ; d) 110° .
- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = 16$ cm, $CD = 10$ cm, iar diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC . Perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu:
 a) 44 cm; b) 104 cm;
 c) 24 cm; d) 48 cm.
- (5p) 5. În figura alăturată, punctele A, B, C aparțin unui cerc cu centrul în O astfel încât $OABC$ este un romb. Dacă $AC = 4\sqrt{3}$ cm, atunci aria cercului este egală cu:
 a) 48π cm²; b) 16π cm²;
 c) 12π cm²; d) 8π cm².



- (5p) 6. În figura alăturată, paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ are $AB = 20$ cm, $BC = 12$ cm și $AA' = 16$ cm. Lungimea diagonalei AC' este egală cu:
- a) 20 cm; b) $20\sqrt{2}$ cm;
c) $10\sqrt{2}$ cm; d) 10 cm.



SUBIECTUL al III-lea. Scrie rezolvările complete.

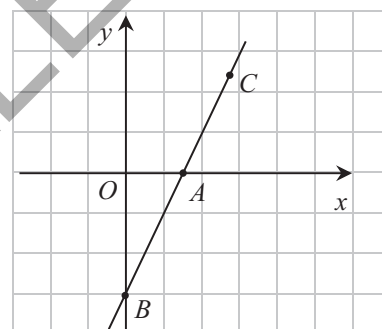
(30 de puncte)

1. Denisa are de nouă ori mai mulți bani decât prietena ei Diana. După ce Denisa îi dă 10 lei Dianei, ea va avea de cinci ori mai mulți bani decât Diana.
- (2p) a) Este posibil ca Denisa să aibă la început 90 de lei? Justifică răspunsul dat.
- (3p) b) Află suma inițială a Dianei.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{3x-x^2} + \frac{1}{x^2+3x} \right) : \frac{6(x+2)}{x(x^2-9)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 3\}$.

- (2p) a) Arată că $E(x) = -\frac{1}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 3\}$.

- (3p) b) Determină toate numerele întregi a pentru care $\frac{1}{|E(a)|} \leq 1$.



3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

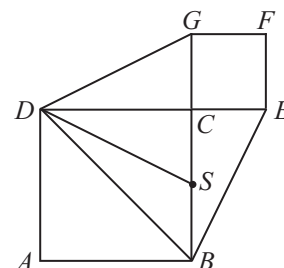
- (2p) a) Arată că $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = -7$.

- (3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale în punctele A , respectiv B . Punctul C este simetricul punctului B față de A . Calculați suma distanțelor de la punctul C la axele de coordonate.

4. În figura alăturată, $ABCD$ și $CEFG$ sunt pătrate cu $AB = 8$ cm, $CE = 4$ cm. Punctele B, C, G sunt coliniare și punctele C, D și E sunt, de asemenea, coliniare.

- (2p) a) Arată că aria patrulaterului $BDGE$ este egală cu 72 cm^2 .

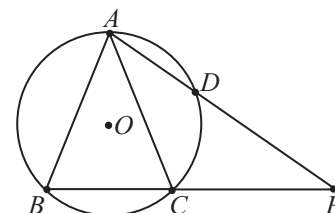
- (3p) b) Dacă punctul S aparține segmentului BC , astfel încât $BS \equiv CS$, demonstrează că dreptele BE și DS sunt perpendiculare.



5. În figura alăturată, punctele A, B, C, D aparțin cercului de centru O și rază R , $AB = AC$, $AD = 4$ cm și $DP = 8$ cm, unde P este intersecția dreptelor AD și BC .

- (2p) a) Arată că măsura arcului $\widehat{ACB}$ este de două ori mai mare decât măsura unghiului ACP .

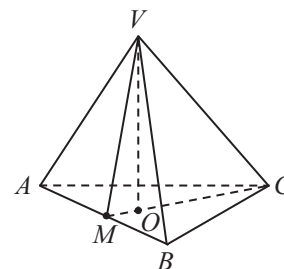
- (3p) b) Calculează lungimea segmentului AC .



6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V . Punctul M este mijlocul segmentului AB , $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$, iar $VM = \frac{BC}{2} = 10$ cm.

- (2p) a) Demonstrează că dreptele CV și MV sunt perpendiculare.

- (3p) b) Calculează măsura unghiului format de planele (VAB) și (VAC) .



SOLUȚII ȘI INDICAȚII DE REZOLVARE

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. a) 50; b) 21; c) 2; d) 27. 2. 45. 3. Valoarea minimă este 0, iar valoarea maximă este 30. 4. $n \in \{60, 61, 64, 69\}$. 5. 1077, 1087. 6. $a = 15$, $b = 4$. 7. $a = 20$, $b = 60$, $c = 422$. 8. 283. 9. a) 16; b) 0; c) 7; d) 28; e) 32; f) 54; g) 7; h) 12. 10. b) $a = 2^{30} = 8^{10} = 3^{20} = b$. 11. a) $a = (2 \cdot 3^{21})^2$; b) Cum ultima cifră a numărului b este 7, rezultă că b nu este pătrat perfect. 12. a) Numărul a este suma a 12 numere impare, deci este un număr par; b) $a = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) = 40(1 + 3^4 + 3^8) : 10$. 13. $a = 12 \cdot 14^n : 12$. 14. $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 300\overline{cd} + \overline{cd} = 7 \cdot 43 \cdot \overline{cd} : 7$. 15. $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$. 16. a) $56 = 2^3 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; b) 10 divizori naturali. 17. a) $n \in \{70, 72, 74, 76, 78\}$; b) $n \in \{630, 612, 684, 666, 648\}$; c) $n \in \{252, 552, 852, 156, 456, 756\}$; d) $n \in \{170, 125\}$. 18. $(48, 60) = 12$, $[48, 60] = 240$; b) $(12, 15, 18) = 3$, $[12, 15, 18] = 180$. 19. Fie x numărul maxim de pachete. Atunci, cum 168, 96 și 72 trebuie să se dividă cu x , rezultă că x este cel mai mare divizor comun al numerelor 168, 96, 72, adică $x = 24$. 20. Fie x numărul florilor din florărie. Din relațiile $x = 18a + 3 = 24b + 3$ ($a, b \in \mathbb{N}$), deducem că $x - 3 = 72k$ sau $x = 72k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$). Cum $450 < 72k + 3 < 570$, rezultă că $x = 72 \cdot 7 + 3 = 507$. 21. Fie x numărul de sportivi. Avem $x = 6a + 3 = 5b + 1 = 9c + 6$, deci $x + 3 = 6(a + 1) = 4(b + 1) = 9(c + 1)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). De aici rezultă că $x + 3 = 36k$ ($k \in \mathbb{N}$) și, cum $x + 3 < 53$, deducem că $x = 33$. Numărul maxim de grupe este 11, iar numărul de sportivi dintr-o grupă este 3. 22. Fie a numărul CD-urilor de 54 de lei și b numărul CD-urilor de 90 de lei cumpărate de Sanda. Avem $54a + 90b = 486$ sau $3a + 5b = 27$. Cum 3 divide pe $3a$ și pe 27, rezultă că 3 divide pe $5b$. De aici, având în vedere că $0 < b < 6$, rezultă că $b = 3$. Deci, $a = 4$ și $b = 3$. Sanda a cumpărat 7 CD-uri. 23. a) $-7 < -3 < -2 < 0 < 1 < 4 < 9$; b) $7 > 3 > 1 > -1 > -2 > -4 > -5$. 24. $-8 = (-8) + (-1) + (+1)$. 25. a) -3; b) 1; c) 5; d) 1; e) -1; f) 21; g) 3; h) 11. 26. -17°C . 27. Divizorii întregi ai numărului 288 sunt $-1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$. Suma lor este 0. 28. $(x + 1) \mid (2x + 5) \Leftrightarrow (x + 1) \mid ((2x + 5) - 2(x + 1)) \Leftrightarrow (x + 1) \mid 3 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 0, 2\}$. 29. $|x| > 3 \Leftrightarrow x \in \{\dots, -6, -5, -4, 4, 5, 6, \dots\}$; $|x + 1| \leq 6 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-6, -5, -4, \dots, 4, 5, 6\} \Leftrightarrow x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\}$. Deci, $x \in \{-7, -6, -5, -4, 4, 5\}$. 30. $(x + 1)(y + 1) = 5 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-6, -2), (-2, -6), (0, 4), (4, 0)\}$.

TEMA 2. Numere raționale

1. a) 1; b) 1; c) -2; d) 1; e) $-\frac{1}{12}$; f) 2; g) 14; h) $\frac{5}{6}$. 2. a) $n \in \{0, 1, 2\}$; b) $n = 3$; c) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 3. Opusul lui a este $-a = 1,25$. Inversul lui a este $\frac{1}{a} = -\frac{4}{5}$. Modulul lui a este $|a| = 1,25$. 4. $\frac{6}{15} = 0,4$; $\frac{11}{5} = 5,5$; $\frac{1}{625} = 0,0016$. 5. a) $-\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < -0, (4) < 1, 1(3) < \frac{4}{3} < 1,7$; b) $0,(3) > 0,33 > 0,(32) > 0,3(2) > 0,3 > 0,2(3)$. 6. $\left[\frac{23}{4}\right] = 5$, $\left\{\frac{23}{4}\right\} = 0,75$, $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, $\left\{-\frac{9}{5}\right\} = 0,2$. 7. $A \cap \mathbb{N} = \{2; 5\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-7; 2; 5\}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{-\frac{23}{3}; -3,4; 0,5; 1,(2)\right\}$. 8. $a = 5$; $b = 1$. 9. $(a - 2)^{10} = (1 - 2)^{10} = 1$. 10. $a = 10 \in \mathbb{N}$. 11. $a = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10} = 0,9$. 12. $\left(\frac{2a}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{100} = 1$. 13. $\frac{12}{7}$. 14. Dacă n este impar, atunci $a = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{4}$, iar dacă n este par, atunci $a = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$. Prin urmare, $|a| = \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. 15. $9x = 9 \cdot \frac{10}{9} = 10 \in \mathbb{N}$. 16. Avem $\frac{48}{5} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \mid 48$

Subiectul al III-lea. 1. a) Fie a prețul biletului pentru adulți și c prețul biletului pentru copii. Atunci $3c + 2a = 140$ și $a = 2c$. Dacă $c = 25$ de lei, atunci $a = 50$ de lei, iar $3c + 2a = 175 \neq 140$ de lei. Așadar, prețul biletului pentru copii nu poate fi de 25 de lei; b) Înlocuind $a = 2c$ în $3c + 2a = 140$, obținem că $c = 20$ de lei și $a = 40$ de lei. **2.** a) $E(x) = x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 13x + 7 - 16 + x^2 = 19x$; b) $E(n) \geq n^3$ echivalent cu $19n \geq n^3$, adică $n(19 - n^2) \geq 0$. Deoarece $n \in \mathbb{N}$, obținem că $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **3.** a) $AB = 2\sqrt{5}$; b) $D(2, -1)$ este simetricul punctului C față de Oy . Atunci $AD = \sqrt{5}$, $BD = \sqrt{5}$ și constatăm că $AB = AD + BD$, deci A, B și D sunt coliniare. **4.** a) Dacă $DP \perp AB$, $P \in AB$, atunci $AP = (AB - DC) : 2 = 3$ cm și, conform teoremei unghiului de 30° , obținem că $AD = 6$ cm. Atunci $\mathcal{P}_{ABCD} = 2AD + AB + CD = 34$ cm; b) Fie $\{Q\} = CM \cap AB$. Constatăm că $\triangle BCQ$ este echilateral, iar C este mijlocul lui MQ . Întrucât $MC \parallel AD$, $MC = AD$, rezultă că $ADMC$ este paralelogram, iar diagonalele se înjumătățesc. **5.** a) Din $\triangle ABM$, $\angle M = 90^\circ$, rezultă că $AM = 6$ cm, deci $GM = AM : 3 = 2$ cm; b) Fie $BH \cap AC = \{T\}$. Deoarece $BT \perp AC$, rezultă că $\angle HBM \equiv \angle CAM$, deci $\triangle HBM \sim \triangle CAM$. Rezultă că $HM = 3$ cm, deci $HG = 1$ cm, întrucât A, H, G și M sunt puncte coliniare. **6.** a) PQ este linie mijlocie în $\triangle ABC'$, deci $AC' = 6\sqrt{3}$ cm, de unde $AB = 6$ cm. Atunci $\mathcal{A}_t = 6^2 = 216$ cm²; b) Deoarece $PQ \parallel AC'$, rezultă că $\angle(PQ, (ABB')) = \angle(AC', (ABB')) = \angle B'AC'$. În $\triangle AB'C'$, $\angle B' = 90^\circ$, obținem că $\operatorname{tg}(\angle B'AC') = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

TESTUL 21

Subiectul I. 1. b). 2. a). 3. a). 4. d). 5. c). 6. b).

Subiectul al II-lea. 1. c). 2. c). 3. c). 4. b). 5. c). 6. d).

Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă r este numărul merelor roșii, g al celor galbene și v al celor verzi, atunci, din relațiile

$\frac{r}{2} = \frac{g}{5} = \frac{v}{6}$ și $r + g + v = 52$, rezultă că $r + \frac{5r}{2} + 3r = 52$, de unde $r = 8$; b) Notăm cu x numărul merelor galbene care ar

trebui puse în coș pentru a fi îndeplinită condiția din enunț. Cum numărul inițial al merelor galbene este 20, avem

$\frac{20+x}{52+x} = \frac{1}{2}$, de unde obținem $x = 12$. **2.** b) $n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 \in \mathbb{N}$. **3.** a) $A(-4, 0)$ și

$B(0, 8)$ sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele de coordonate, iar distanța cerută este egală cu $OA \cdot OB : AB = 4 \cdot 8 : 4\sqrt{5} = 8 : \sqrt{5}$; b) $M(-1, 6), N(2, 12), M'(-1, 0), N'(2, 0)$, $\mathcal{A}_{MM'NN'} = (MM' + NN') \cdot M'N' : 2 = 27$.

4. a) Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$. Cum $BE = 2$ cm, $\angle E = 90^\circ$ și $\angle B = 60^\circ$, rezultă că $BC = 4$ cm și $CE = 2\sqrt{3}$ cm.

Aria trapezului $ABCD$ este egală cu $\frac{(AB+CD) \cdot CE}{2} = 10\sqrt{3}$ cm²; b) Deoarece $BC = CD = 4$ cm, rezultă că $\angle BDC =$

$\angle CBD$. Din relația $AB \parallel CD$ deducem că $\angle BDC = \angle ABD$, deci $\angle BDC = \angle CBD = \angle ABD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$. **5.** a) $BC^2 =$

$AB^2 + AC^2 = 100$, deci $BC = 10$ cm; b) Deoarece $\frac{CE}{CD} = \frac{5}{4} = \frac{CB}{CA}$ și $\angle ECD = \angle BCA$, rezultă că $\triangle ECD \sim \triangle BCA$, deci

$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}$, de unde obținem $DE = 3$ cm. Din relațiile $EA = ED = 3$ cm și $BA = BD = 6$ cm rezultă că BE este

mediatoarea segmentului AD . **6.** a) Fie M mijlocul laturii BC . Deoarece $OM = 2\sqrt{3}$ cm, $VO = 2$ cm și $\angle VOM = 90^\circ$, rezultă că $VM = 4$ cm, deci $\mathcal{A}_t = 3\mathcal{A}_{VBC} = 72$ cm²; b) Avem $\angle((ABC), (VBC)) = \angle(VM, OM) = 30^\circ$.

TESTUL 22

Subiectul I. 1. a). 2. c). 3. a). 4. c). 5. a). 6. b).

Subiectul al II-lea. 1. b). 2. c). 3. a). 4. c). 5. b). 6. a).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece am obține $200 = \overline{2y} + \overline{z2}$; b) Se obține $89x = y + 10z$, de unde deducem că $\overline{xyz} =$

$= 198$. **2.** b) $E(n) = -\frac{8}{n+2}$ este număr prim pentru $n = -6$. **3.** a) $\frac{f(1) - f(\sqrt{2})}{\sqrt{2} - 1} = 2$; b) $A\left(\frac{3}{2}, 0\right), B(0, 3)$. **4.** a) $BD =$

$= 9\sqrt{2}$ cm; $\sin(\angle ABD) = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$; b) Dacă $\{N\} = MC \cap BD$, atunci $\triangle MNB \sim \triangle CND$, de unde $BN = 3\sqrt{2}$ cm. În $\triangle BAE$,

$AQ \perp A'P$, $Q \in A'P$. Din relațiile $A'P \perp BD$, $AP \perp BD$ și $AQ \perp A'P$ rezultă că $AQ \perp (A'BD)$ (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare), deci $d(A, (A'BD)) = AQ = \frac{AA' \cdot AP}{A'P} = \frac{60}{13}$ cm.

TESTUL 63

Subiectul I. 1. a). 2. d). 3. c). 4. c). 5. b). 6. a).

Subiectul al II-lea. 1. c). 2. a). 3. a). 4. b). 5. c). 6. c).

Subiectul al III-lea. 1. a) 20%; b) 240 de băieți și 288 de fete. 2. a) $x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$; b) $E(x) = x$, $E(4x^2 + 9) - 12E(x) = (2x - 3)^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. 3. a) 3; b) $AB = \sqrt{2}$. 4. a) Cum triunghiurile ABC și DEF sunt dreptunghice isoscele, avem $\sphericalangle NBF = \sphericalangle ABC = 45^\circ$ și $\sphericalangle NFB = \sphericalangle DFE = 45^\circ$, deci $\sphericalangle BND = 90^\circ$. Din relațiile $\sphericalangle NAM = \sphericalangle AND = \sphericalangle NDM = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul $AMDN$ este dreptunghi; b) Observăm că $AC = 8\sqrt{2}$ cm, $ME = MC = 5\sqrt{2}$ cm și $DE = 9\sqrt{2}$ cm, deci $AM = AC - MC = 3\sqrt{2}$ cm și $MD = DE - ME = 4\sqrt{2}$ cm. Prin urmare, $MN = 5\sqrt{2}$ cm. 5. a) Cum $DE \cdot AB = DF \cdot BC (= \mathcal{A}_{ABCD})$, înseamnă că $DF = 4$ cm; b) În triunghiul CFD , avem $\sphericalangle F = 90^\circ$ și $DC = 2DF$, deci $\sphericalangle C = 30^\circ$ și $CG = CF^2 : CD = 6$ cm $= CB$. Așadar, $\sphericalangle GBC = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$. Din relațiile $\sphericalangle ABC = 150^\circ$ (căci $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle C = 30^\circ$) și $\sphericalangle GBC = 75^\circ$ rezultă că semidreapta BG este bisectoarea unghiului ABC . 6. a) $\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = 52\pi \text{ cm}^3$; b) $G = 5$ cm și $\mathcal{A}_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 80\pi \text{ cm}^2$.

TESTUL 64

Subiectul I. 1. d). 2. c). 3. d). 4. d). 5. a). 6. b).

Subiectul al II-lea. 1. c). 2. c). 3. b). 4. d). 5. c). 6. c).

Subiectul al III-lea. 1. a) 3914 t; b) 87 ha, 119 ha. 2. a) $E(x) = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x(x+1)}{1} - x = x^3 - x$; b) $E(n) = n(n-1)(n+1)$. Cum $n-1$, n și $n+1$ sunt trei numere naturale consecutive ($n \in \mathbb{N}^*$), rezultă că unul dintre ele se divide cu 2 și unul dintre ele se divide cu 3 (este posibil să fie același număr), deci produsul lor se divide cu 6, căci $(2; 3) = 1$. 3. a) Cum $f(\sqrt{9}) = 0$, rezultă că produsul considerat este egal cu 0; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 4. a) Fie $DP \perp AB$, $P \in (AB)$. Avem $AP = \frac{AD}{2} = 6$ cm, $PB = 18$ cm, $DP = 6\sqrt{3}$ cm, deci $BD = 12\sqrt{3}$ cm; b) Dacă F este mijlocul lui AB , atunci $BF = CE$ și $BF \parallel CE$, adică $BFEC$ este paralelogram, deci $EF = BC = 12$ cm. Așadar, $EF = AF = BF = 12$ cm, de unde rezultă că $\sphericalangle AEB = 90^\circ$. 5. a) Deoarece $\sphericalangle DAE = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, rezultă că $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 80$, deci $DE = 4\sqrt{5}$ cm; b) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice DCF și EBF , obținem $DF = EF = 4\sqrt{5} = DE$, de unde rezultă că triunghiul DEF este echilateral. 6. a) $\sphericalangle((ABD), (CBE)) = \sphericalangle(AB, BC) = 60^\circ$; b) Fie $DE \cap AC = \{F\}$. Avem $(ABC) \cap (BDE) = BF$. Cum $CE \parallel AD$ și $AD = 2CE$, rezultă că $AC = CF = BC$, deci $AB \perp BF$. Din relațiile $DA \perp (ABC)$ și $AB \perp BF$, deducem că $DB \perp BF$. Prin urmare, distanța căutată este $BD = 50$ cm.

TESTUL 65

Subiectul I. 1. a). 2. c). 3. d). 4. d). 5. b). 6. a).

Subiectul al II-lea. 1. b). 2. a). 3. c). 4. b). 5. c). 6. a).

Subiectul al III-lea. 1. a) 50 de pagini; b) 200 de pagini. 2. a) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 5) + 6 = \overset{x^2+2x=a}{a(a+5)} + 6 = a^2 + 2a + 3a + 6 = a(a+2) + 3(a+2) = (a+2)(a+3) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3)$; b) $E(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + 1} \geq 0$,

ADE este isoscel; b) Fie M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC . Rezultă că MN este linie mijlocie în trapez, deci $MN \parallel AB \parallel CD$ și $MN = \frac{AB+CD}{2} = 15$ cm. Triunghiul ADE este isoscel și $DP \perp AE$, deci P este mijlocul segmentului AE . Atunci MP este linie mijlocie în triunghiul ADE , deci $MP \parallel DE$, $MP = \frac{DE}{2} = 4$ cm. Printr-un raționament similar celui de la punctul a) se arată că triunghiul BCF este isoscel. Cum $CQ \perp BF$, rezultă că Q este mijlocul segmentului BF . Atunci NQ este linie mijlocie în triunghiul BCF , deci $NQ \parallel CF$, $NQ = \frac{CF}{2} = 4,5$ cm. Cum $MN \parallel CD$, $MP \parallel CD$ și $NQ \parallel CD$, punctele M, P, Q, N sunt coliniare, iar $PQ = MN - (MP + NQ) = 15 - (4 + 4,5) = 6,5$ cm.

6. b) $BM = BN$, BP latură comună și $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle NBP$; rezultă că $\triangle MBP \equiv \triangle NBP$ (LUL). Deducem că $\sphericalangle BPN = 90^\circ$, deci $NP \perp VB$ și cum $MP \perp VB$ și $MP \cap NP = \{P\}$, rezultă că $VB \perp (MNP)$.

TESTUL 99

Subiectul I. 1. d). 2. c). 3. a). 4. b). 5. b). 6. a).

Subiectul al II-lea. 1. c). 2. a). 3. c). 4. a). 5. b). 6. b).

Subiectul al III-lea. 1. a) Fie x – suma Dianei. Dacă $9x = 90$, atunci $x = 10$ lei. Însă, $90 - 10 = 5(10 + 10)$, evident fals.

Așadar, Denisa nu poate avea 90 de lei; b) $9x - 10 = 5(x + 10) \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15$ lei. 2. b) $\frac{1}{|E(a)|} \leq 1 \Rightarrow |a + 2| \leq 1$,

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 2 \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow a \in \{-3, -2, -1\}$. Dar $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 3\}$, deci $a = -1$. 3. b) $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ și $B(0, -3)$

sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox , respectiv Oy . Din $x_A = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_A =$

$= \frac{y_B + y_C}{2}$, obținem că $x_C = 3$, $y_C = 3$. Atunci $d(C, Ox) + d(C, Oy) = 3 + 3 = 6$. 4. a) $\mathcal{A}_{BDGE} = \mathcal{A}_{BCD} + \mathcal{A}_{ECG} + \mathcal{A}_{BCE} +$

$+ \mathcal{A}_{DCG} = \frac{BG \cdot GD}{2} + \frac{EC \cdot CG}{2} + \frac{BC \cdot CE}{2} + \frac{DC \cdot CG}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 4}{2} \cdot 2$, rezultă că $\mathcal{A}_{BDGE} = 72$ cm²; b) Fie

$\{O\} = AC \cap BD$; atunci punctele F, C, O sunt coliniare ($\sphericalangle FCO = \sphericalangle FCE + \sphericalangle ECB + \sphericalangle BCO = 180^\circ$) și $FC \perp BD$. Cum $CSEF$ este paralelogram, avem $ES \parallel CF$, deci $ES \perp BD$. Obținem că S este ortocentrul triunghiului BDE , de unde $DS \perp BE$.

5. a) $\sphericalangle ACP$ este unghi exterior triunghiului ABC , rezultă că $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$, deci $\widehat{ACB} =$

$= 2\sphericalangle ACP$; b) Cum $AB = AC$, rezultă că $\widehat{AB} = \widehat{AC}$. Dar $\sphericalangle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$ și $\sphericalangle ADB = \frac{\widehat{AB}}{2}$, deci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB$, adică

$\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADB$. Avem și $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAP$, așadar triunghiurile ADB și ABP sunt asemenea, de unde obținem $AB = AC =$

$= 4\sqrt{3}$ cm. 6. a) În triunghiul VAB , mediana VM este egală cu jumătatea laturii pe care cade, prin urmare, $\sphericalangle AVB = 90^\circ$. Piramida $VABC$ fiind regulată, rezultă că $\sphericalangle BVC = \sphericalangle AVC = 90^\circ$. Din $CV \perp AV$ și $CV \perp BV$, urmează că $CV \perp (VAB)$, de unde $CV \perp MV$; b) $(VAB) \cap (VAC) = VA$, $VB \perp VA$ și $VC \perp VA$; rezultă că $\sphericalangle((VAB), (VAC)) = \sphericalangle(VB, VC) = \sphericalangle BVC = 90^\circ$.

TESTUL 100

Subiectul I. 1. c). 2. b). 3. a). 4. c). 5. a). 6. b).

Subiectul al II-lea. 1. a). 2. c). 3. b). 4. b). 5. c). 6. d).

Subiectul al III-lea. 1. a) Ar avea maxim $20 \cdot 5 = 100$ puncte, evident fals. Așadar, nu e posibil; b) $5c - (30 - c) \cdot 3 =$

$= 118$, de unde $c = 26$. 2. b) $E(x) = (x + 3)^2$; $\sqrt{E(a)} = 1 \Leftrightarrow |a + 3| = 1 \Leftrightarrow a + 3 \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow a \in \{-4, -2\}$. Cum $a \in \mathbb{R} \setminus$

$\setminus \{-2, -1\}$, obținem $a = -4$. 3. a) $f(2) = -2$; $f(-2) = -10 \Rightarrow f(2) - f(-2) = -2 + 10 = 8$; b) $A(3, 0)$ și $B(0, -6)$ reprezintă punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox , respectiv Oy . Atunci $d(S, AB) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. 4. a) $OA = OB$, $\sphericalangle AOB =$

$= 60^\circ$, deci triunghiul AOB este echilateral. Rezultă că $AB = OA = OB = 16$ cm; b) Fie $MP \perp BC$, $P \in BC$, atunci